

# Forças Radiativas no Modelo de Lorentz para a realização de Armadilhas Dipolares Ópticas

Humberto Ribeiro de Souza\*

*Universidade de São Paulo*

*Instituto de Física de São Carlos*

Este trabalho irá estudar o comportamento esperado para armadilhas dipolares, com uma pequena introdução sobre forças radiativas e do modelo de Lorentz para um oscilador harmônico clássico, que será necessária para prosseguir com as discussões. Posteriormente será analisado o comportamento de dois possíveis tipos de armadilha, os que estão abaixo da frequência de ressonância e os que estão acima da frequência de ressonância covered at length in the main body of the article.

## I. INTRODUÇÃO

A criação de armadilhas ópticas é uma área de extrema importância para a física experimental desde a década de 80. O simples desafio de conseguir manter o controle de uma amostra em condições tão extremas por si só gera um conhecimento extraordinário sobre a interação entre átomos à baixas temperaturas. Se adicionarmos à este fato as suas inúmeras aplicações, com um foco maior na produção de um Condensado de Bose-Einstein num conjunto de átomos.

O estudo desta monografia será centrado na armadilha dipolar óptica, com o intuito de utilizar a força de Abraham-Lorentz como uma força resistiva do sistema. Para ser possível discutir sobre este tipo de armadilha, é preciso primeiro introduzir a força de radiação que estará presente no sistema, como também o modelo de Lorentz clássico para um oscilador.

### A. Força de radiação

Há muito tempo se sabe que uma carga acelerada irá produzir radiação, questão que é discutida na maioria dos livros de ensino de Eletromagnetismo, então quando esta carga estiver sob o efeito de uma força

externa, a mesma terá uma aceleração menor do que a aceleração de uma carga neutra. Devido a produção desta radiação, ocorrerá uma perda da sua energia cinética. Tudo isso indica a presença de uma força exercida pela radiação na própria carga.

O modelo de Abraham-Lorentz nos diz que esta força vale[1]:

$$\mathbf{F}_{rad} = m\tau\dot{\mathbf{a}} \quad (1)$$

$$\text{onde: } \tau = \frac{\mu_0 q^2}{6m\pi c}$$

A existência desta força é necessária para garantir que não ocorra nenhuma descontinuidade na equação de movimento e suas derivadas, mas gerou alguns problemas conceituais problemáticos consigo, como o problema da pré-aceleração, que será discutido como item extra nesta monografia.

### B. Modelo de Lorentz para um Oscilador Clássico

Este modelo de Lorentz consiste na afirmação de que o comportamento do elétron com o núcleo será o mesmo de um sistema massa-mola e, ao adicionar a força de radiação apresentada na seção anterior, teremos um termo de amortecimento da oscilação deste sistema.

---

\* humberto.souza@usp.br

Também é adicionado um campo elétrico oscilante da forma  $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$  neste sistema, gerando uma força externa  $F_{ext} = qE$ , criando um momento de dipolo no átomo da forma  $p(t) = p_0 \cos(\omega t + \varphi)$ .

### C. Armadilhas dipolares ópticas

Para otimizar o desempenho desta armadilha, devemos olhar primeiramente para duas características do sistema: o potencial de interação dipolar e a taxa de espalhamento.

O potencial de interação dipolar é dado pela equação[2]:

$$U_{dip} = -\frac{\langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \rangle}{2} = -\frac{\Re[\alpha]}{2\epsilon_0 c} I \quad (2)$$

Para determinar a taxa de espalhamento, devemos primeiramente determinar a potência absorvida pelo oscilador do campo externo, que será dada por [2]:

$$P_{abs} = \langle \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{\omega}{\epsilon_0 c} \Im[\alpha] I \quad (3)$$

Com esta equação podemos determinar que a taxa de espalhamento vale:

$$\Gamma_{sc} = \frac{P_{abs}}{\hbar\omega} = \omega \frac{\Im[\alpha]}{\epsilon_0 c} I \quad (4)$$

É possível reparar que ambos os termos tem dependência direta com a polarizabilidade complexa  $\alpha$ , que será encontrada utilizando o modelo de Lorentz na seção abaixo.

## II. OSCILADOR CLÁSSICO DE LORENTZ

Para o modelo de Lorentz, deve-se assumir primeiramente que o elétron estará próximo à sua órbita de equilíbrio, então podemos utilizar a aproximação de pequenas oscilações, permitindo assumir que a força de

ligação será dada por  $F = -m\omega_0 x$ . Então a equação diferencial do oscilador de Lorentz será dada por:

$$m\tau \ddot{x} - m\ddot{x} - m\omega_0 x = F_{ext} = eE_0 \cos(\omega t) \quad (5)$$

Onde  $E_0$  é a amplitude do campo elétrico aplicado. Utilizando a notação complexa e reorganizando a EDO, obtemos:

$$\ddot{x} - \frac{1}{\tau} \dot{x} - \omega_0 x = \frac{eE_0}{m\tau} e^{i\omega t} \quad (6)$$

Utilizando a solução estacionária deste oscilador, temos que  $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$ , encontrando então a amplitude do movimento:

$$x_0 = \frac{eE_0/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\tau\omega^3} \quad (7)$$

Se utilizarmos este resultado nas relações abaixo:

$$p(t) = -ex(t) \quad (8)$$

$$p_0 = \alpha E_0 \quad (9)$$

É possível encontrar a relação pra amplitude do momento de dipolo:

$$p_0 = ex_0 = \frac{e^2 E_0/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\tau\omega^3} \quad (10)$$

Por fim, obtemos a expressão da polarizabilidade complexa:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\tau\omega^3} \\ &= \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \tau^2\omega^6} + i \frac{\tau\omega^3 e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \tau^2\omega^6} \end{aligned} \quad (11)$$

## III. ARMADILHAS DIPOLARES ÓPTICAS

Encontrando a expressão para a polarizabilidade e desprezando a contribuição do termo  $\tau^2\omega^6$  no denominador, é possível determinar o potencial de interação e a taxa de espalhamento :

### A. Detuning Vermelho

$$U_{dip} = 3\pi c^2 \left[ \frac{\tau}{\omega_0 - \omega} + \frac{\tau}{\omega_0 + \omega} \right] I \quad (12)$$

$$\Gamma_{sc} = 6\pi c^2 \frac{\omega^3}{\hbar} \left[ \frac{\tau}{\omega_0 - \omega} + \frac{\tau}{\omega_0 + \omega} \right]^2 I$$

Se escolhermos uma frequência do campo elétrico externo boa o suficiente para ignorar a contribuição da parte  $(\omega_0 + \omega)^{-1}$ , obtemos:

$$U_{dip} = 3\pi c^2 \frac{\tau}{\Delta} I \quad (13)$$

$$\Gamma_{sc} = 6\pi c^2 \frac{\omega^3}{\hbar} \frac{\tau^2}{\Delta^2} I$$

Utilizando a expressão para o *detuning*  $\Delta = \omega_0 - \omega$ .

Estas são as expressões necessárias para a compressão básica de uma armadilha óptica dipolar. Delas, já é possível analisar dois aspectos importantes: o sinal do *detuning* e a dependência com a intensidade e o *detuning*.

Dependendo do sinal do *detuning*, o nosso sistema terá características diferentes:

- $\Delta < 0$  - *Detuning* "Vermelho": Neste caso temos  $U_{dip} < 0$ , então ocorrerá a atração de átomos para o campo. O mínimo do potencial ocorrerá nos pontos de máxima intensidade;
- $\Delta > 0$  - *Detuning* "Azul": Para estas frequências  $U_{dip} > 0$ , então os átomos serão repelidos para fora do campo. O mínimo de potencial ocorre nos pontos de mínima intensidade.

Para o potencial de interação, temos uma dependência da forma  $I/\Delta$ , enquanto que, para a taxa de espalhamento, nós temos uma dependência da forma  $I/\Delta^2$ . Portanto, estes tipos de armadilha sempre tentam usar altos valores de *detuning*, garantindo que a frequência ainda satisfaça a relação  $|\Delta| \ll \omega_0$ , e altos valores de intensidade, para garantir que o aumento na contribuição de ambos se anulem para o potencial, mas provoque uma diminuição na taxa de espalhamento, por causa da sua dependência com  $\Delta^{-2}$ .

Para o *detuning* em frequências baixas, temos três grandes métodos bem estabelecidos: as armadilhas com um único apenas um feixe de luz focado (*Focused-beam trap*), armadilhas com um feixe de luz vertical, onde os átomos ficaram confinados nos antinós da onda (*Standing-wave trap*), e as armadilhas com feixes cruzados (*Crossed-beam trap*), onde temos a participação de pelo menos dois feixes de luz.

#### 1. Focused-beam trap

O comportamento da intensidade deste feixe de luz, em coordenadas cilíndricas, será dado por:

$$I_{FB}(r, z) = \frac{2P}{\pi\omega^2(z)} \exp\left(-2\frac{r^2}{\omega^2(z)}\right) \quad (14)$$

$$\text{onde: } \omega^2(z) = \omega_0 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2 \right]$$

A constante  $\omega_0$  determina o comprimento radial mínimo da distribuição de intensidade, enquanto o comprimento de Rayleigh  $z_r = \pi\omega_0^2/\lambda$  determina o comprimento axial.

Se a energia térmica  $k_b T$  for pequena o suficiente, obtemos uma armadilha com os seus comprimentos radiais e axiais inferiores aos determinados acima. Neste caso, podemos aproximar a energia potencial óptica para a de um oscilador harmônico cilíndrico da forma:

$$U_{FB}(r, z) = -\hat{U} \left[ 1 - 2 \left( \frac{r}{\omega_0} \right)^2 - \left( \frac{z}{z_R} \right)^2 \right] \quad (15)$$

Utilizando o termo  $\hat{U} = U_{dip}(r=0, z=0)$ . Com isso, encontramos que as frequências de oscilação radial e axial da armadilha valem  $\omega_r^2 = 4\hat{U}/m\omega_0^2$  e  $\omega_z = 2\hat{U}/mz_r^2$ .

## 2. Standing-wave trap

Este tipo de armadilha é capaz de confinar a amostra em espaços bem compactos, pois os átomos ficam apenas nos antinós do feixe de luz. Se este esquema for feito na vertical, a contribuição da armadilha será superior a contribuição causada pela gravidade. Novamente esperamos que ocorram apenas pequenas oscilações nestas armadilhas, mas para este caso teremos um potencial óptico da forma:

$$U_{SW} = -4\hat{U} \cos^2(kz) \left[ 1 - 2 \left( \frac{r}{\omega_0} \right)^2 - \left( \frac{z}{z_R} \right)^2 \right] \quad (16)$$

Sendo que a frequência de oscilação axial para este caso será  $\omega_z^2 = 2\hat{U}\hbar k/m$ .

## 3. Crossed-beam trap

Nos métodos anteriores, pelo fato de se utilizar apenas um feixe de luz, temos a presença de armadilhas anisotrópicas. Para solucionar este problema, utilizamos dois feixes perpendiculares que tenham polarizações ortogonais.

Podemos novamente utilizar a aproximação de pequenas oscilações para obter o potencial óptico:

$$U_{CB}(x, y, z) = -\hat{U} \left( 1 - \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\omega_0^2} \right) \quad (17)$$

As frequências de oscilação da armadilha para este método serão  $\omega_x^2 = \omega_y^2 = \hat{U}/\omega_0^2$  e  $\omega_z^2 = 2\omega_x$ .

### B. Detuning Azul

A realização de armadilhas no *detuning* azul é muito mais complexa que o caso anterior, devido a baixa interação com a luz. Para estas condições, o potencial dipolar tem caráter repulsivo ( $U_{dip} > 0$ ). A grande vantagem deste método é na geração de armadilhas que precisam de uma baixa influência da luz,

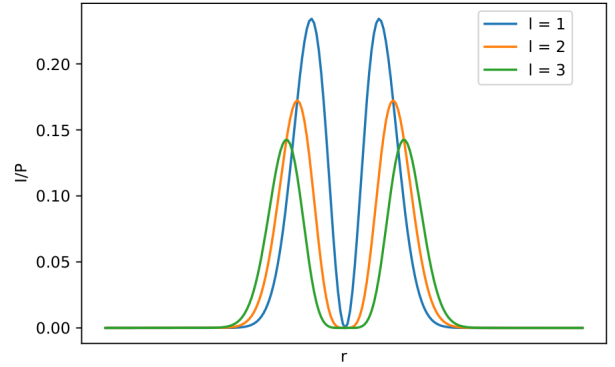


Figura 1. Distribuição da intensidade de um feixe "oco"

pois a intensidade será mínima quando o potencial for mínimo nestas frequências, então teremos uma diminuição da quantidade de fótons espalhados.

Neste trabalho será discutido apenas as armadilhas realizadas com feixes "ocos" (*Hollow laser beams*).

### 1. Hollow Beam Traps

Existem diversos feixes para gerar armadilhas neste caso, mas utilizaremos um feixe que tem a sua distribuição de intensidade dada por:

$$I_H(r) = P \frac{2^{l+1} r^{2l}}{\pi l! \omega_0^{2(l+1)}} \exp\left(-2 \frac{r^2}{\omega_0}\right) \quad (18)$$

Onde o  $l$  pode ser um número natural qualquer. O gráfico da Figura 1 mostra o comportamento dessa distribuição para os três primeiros valores de  $l$ .

## IV. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi possível observar que a utilização da força de Abraham-Lorentz, no estado estacionário, se comporta da mesma maneira que uma força resistiva da forma  $F = -b\dot{x}$ . Utilizamos esta força no modelo de Lorentz para um oscilador clássico, encontrando então a relação para a polarizabilidade complexa  $\alpha$ .

Encontrando este termo, conseguimos determinar uma expressão para o potencial de interação dipolar e a taxa de espalhamento que ocorrem numa amostra

que será armadilhada, com isso foi possível realizar a análise de dois aspectos importantes para este aparato: o sinal do *detuning* e a razão entre a intensidade e o *detuning* nas relações acima.

Para o *detuning* vermelho, por causa da sua simplicidade em comparação ao *detuning* azul, foi apresentado brevemente três importantes métodos para a rea-

lização de armadilhas, a armadilha de um laser gaussiano, a armadilha nos antinós de um laser e a armadilha composta por mais de um feixe.

Para o *detuning* azul, devido à sua complexidade, foi discutido sucintamente apenas da armadilha de um feixe "oco" (um feixe onde a sua intensidade é quase nula no centro).

---

[1] Griffiths, David J (1962): *Introduction to electrodynamics*. , Prentice Hall.

[2] Grimm, Rudolf / Weidemüller, Matthias / Ovchinnikov,

Yurii B (2000): *Optical dipole traps for neutral atoms*. Advances in atomic, molecular, and optical physics. Elsevier: 95–170.